QUESITO 4 2018

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - 2x$$

e considerato un generico punto $P(0;k)$ dell'asse delle ordinate, dimostra che esistono rette tangenti al grafico di $f(x)$ passanti per P se e solo se $0 < k \le \sqrt{3}$.

La funzione $f(x)$ è definita su R. Procediamo nel seguente modo: ricaviamo l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in un suo generico punto $A(t; f(t))$, con $t \in R$, e imponiamo che tale retta passi per il punto $P(0;k)$.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} - 2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 2,$$

osserviamo che è definita su R e ricaviamo l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $A(t; f(t))$:

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}} - 2\right)(x-t) + \sqrt{t^2+3} - 2t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y = \left(\frac{t - 2\sqrt{t^2+3}}{\sqrt{t^2+3}}\right)x + \frac{3}{\sqrt{t^2+3}}.$$

Il termine $\frac{3}{\sqrt{t^2+3}}$ rappresenta l'ordinata all'origine della tangente in $A(t; f(t))$ per ogni $t \in R$.

Imponendo quindi che tale retta tangente passi per il generico punto $P(0;k)$, otteniamo:

$$\frac{3}{\sqrt{t^2+3}} = k \quad \rightarrow \quad k > 0.$$

Inoltre vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$t^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad t^2 + 3 \geq 3 \quad \rightarrow \quad \sqrt{t^2+3} \geq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{t^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{3}{\sqrt{t^2+3}} \leq \sqrt{3}.$$

Quindi deve essere:

$$0 < k \leq \sqrt{3},$$

come si doveva dimostrare.